

Analyse III pour CGC, GC et SIE : Organisation du cours

David Strütt

EPFL MATH-203(b) Analyse III

12 septembre 2024

Enseignant : David Strütt

Chargé de cours depuis 2018

Ancien étudiant de l'EPFL

Assistant Principal : Younes Zine

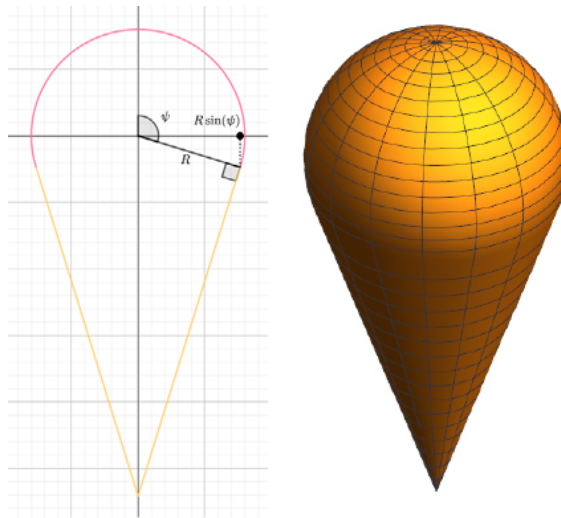
Postdoc en équations aux dérivées partielles
déterministes et stochastiques.

Plus 7 assistant · es étudiant · es et doctorant · es

Contenu

Analyse Vectorielle :

- Opérateurs différentiels de la physique.
- Champs qui dérivent d'un potentiel.
- Intégrales multiples, curvilignes et de surface.
Théorèmes de Green, divergence et Stokes.

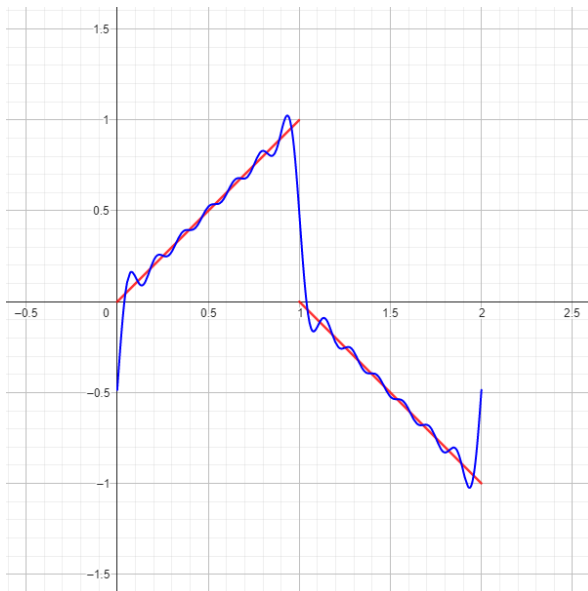


Calculer le volume de glace dans un cornet standard

Contenu

Analyse de Fourier :

- Séries de Fourier.
- Transformée de Fourier.
- Applications aux équations différentielles ordinaires et intégrales.



Le cours ressemblera à Analyse II :

- Problème type $\rightarrow$ méthode pour le résoudre, calcul, calcul, calcul...
- Aucune démonstration formelle ne sera faite dans le cours et il n'y aura aucune démonstration à redonner dans l'examen.

Les ressources d'apprentissages auxquelles vous avez accès sont :

- Les cours ex cathedra les jeudis de 13h15 à 15h00 en CM 3 (retransmis en live). Les notes de cours manuscrites seront uploadées tous les vendredis.
- Les séries d'exercices publiées sur moodle (6 jours avant la séance correspondante, la série est publiée, le lendemain de la séance, un (complément au) corrigé est publié.)

Les ressources d'apprentissages auxquelles vous avez accès sont :

- Le livre *Analyse avancée pour ingénieurs* par B. Dacorogna et C. Tanteri, les notes de cours de l'automne 2023, les vidéos du cours d'automne 2021, des exercices supplémentaires, d'anciens examens avec leurs corrigés.
- Les séances d'exercices avec les assistant · es les jeudis de 15h15 à 17h.
- Le forum Ed Discussions surveillé par des assistant · es les mardis soirs à partir de la semaine 3.

À propos du livre *analyse avancée pour ingénieurs* :

- Référence du cours.
- Une version consultable en ligne (et téléchargeable) est disponible sur moodle.
- Les corrigés des exercices s'y trouvent, ceux-ci sont complétés par des ressources mises à disposition sur moodle.

À propos du forum Ed-Discussion :

- Surveillé à partir de la semaine 3
- Merci d'utiliser des titres descriptifs (Série XX, Ex XX, ...)
- Maintenu pendant les révisions

un peu de VF?

✓

L'examen aura une partie QCM et une partie ouverte. Les questions ressembleront à ce qu'il y a dans les séries d'exercice : Une majorité de question type et quelques questions de compréhension.

Dans l'examen, il y aura les tables de transformée de Fourier (voir § 15.5, page 245 du livre *Analyse avancée pour ingénieurs* par Dacorogna Tanteri)

Vous pouvez amener un formulaire d'une page A4 recto verso.

Vous n'avez pas le droit d'amener une calculatrice, ou toute autre machine électronique.

Questions ?

Notations

MATH-203(b) - Analyse III pour CGC, GC, SIE

automne 2023

- On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres entiers $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ et on notera parfois $\mathbb{N}_{\geq k} = \{n \in \mathbb{N} : n \geq k\}$.
- On note $\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres entiers relatifs $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.
- On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$
- On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
- On note $\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$ l'ensemble des nombres complexes.
- Pour $n \geq 2$, on note $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ fois}} = \{(x_1, \dots, x_n) : \forall 1 \leq i \leq n, x_i \in \mathbb{R}\}$.

Si $n = 2$, on écrit $(x_1, x_2) = (x, y)$ et si $n = 3$, on écrit $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$, c'est-à-dire, x n'est pas le vecteur, mais sa première composante.

- Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, une fonction de Ω à valeur dans $\mathbb{R}$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée un champ scalaire. Ω est le domaine de f , $\mathbb{R}$ son codomaine. L'image de f notée $\text{Im}(f)$ est l'ensemble $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \Omega \text{ tel que } f(x) = y\} = f(\Omega)$.

Si Ω est ouvert, on écrit $f \in C^0(\Omega)$ si f est continue sur Ω , c'est-à-dire, f est continue en chaque point de Ω , et pour $k \geq 1$, on écrit $f \in C^k(\Omega)$ si toutes les dérivées d'ordre plus petit ou égal à k existent et sont continues.

- Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, une fonction de Ω à valeur dans $\mathbb{R}^n$, $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est appelé un champ vectoriel. On écrit alors $F = (F_1, \dots, F_n)$ avec $F_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Ω est le domaine de F , $\mathbb{R}^n$ son le codomaine. L'image de F noté $\text{Im}(F)$ est l'ensemble $\text{Im}(f) = \{y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n : \exists x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } F(x) = y\} = F(\Omega)$.

Si Ω est ouvert, et $k \in \mathbb{N}$, on écrit $F \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$ si $F_i \in C^k(\Omega)$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

- Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $|x|$ dénote la norme euclidienne standard : $|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.

Partie I: Analyse Vectorielle

Chapitre 1: Les opérateurs différentiels de la physique.

§ 1.1 Le gradient

Définition 1.1: Le gradient

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f \in C^1(\Omega)$, $f = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Le gradient de f noté $\text{grad } f$, ∇f , Df est le champ vectoriel

$$\nabla f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x \longmapsto \nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$$

Remarque 1.2:

On écrit $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$ qu'on appelle opérateur

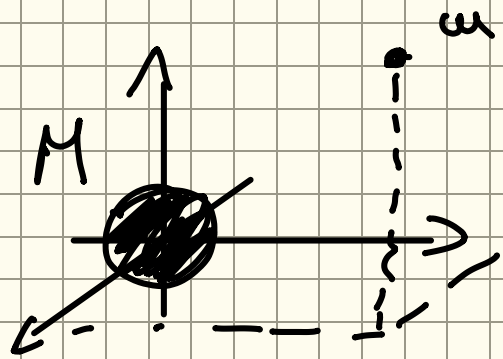
Par que ∇f se comporte comme la "multiplication par scalaire"

un "vecteur" ∇ , et un scalaire f . On interprète $\frac{\partial}{\partial x_i} \cdot f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$

Exemple 1.3

$$f(x, y, z) = \frac{GmM}{r(x, y, z)} \quad \text{où } r(x, y, z) = |(x, y, z)| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

le champ potentiel de la gravitation



$$\text{On a } \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot 2x = \frac{x}{r(x, y, z)}$$

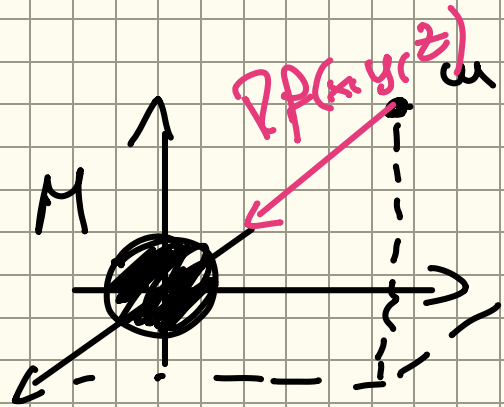
$$\frac{\partial r}{\partial y}(x, y, z) = \frac{y}{r(x, y, z)}, \quad \frac{\partial r}{\partial z}(x, y, z) = \frac{z}{r(x, y, z)}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= GmM \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{r(x, y, z)} \right] = GmM \cdot \frac{-1}{r(x, y, z)^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial x}(x, y, z) \\ &= GmM \cdot \frac{-x}{r(x, y, z)^3} = - \frac{GmM}{r(x, y, z)^3} \cdot x \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = -\frac{GmM}{r(x, y, z)^3} \cdot y, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -\frac{GmM}{r(x, y, z)^3} \cdot z$$

$$\nabla f(x, y, z) = \left(-\frac{GmM}{r(x, y, z)^3} \cdot x, -\frac{GmM}{r(x, y, z)^3} \cdot y, -\frac{GmM}{r(x, y, z)^3} \cdot z \right)$$

$$= -\frac{GmM}{r(x, y, z)^3} (x, y, z)$$



Interprétation géométrique : ∇f pointe toujours dans la direction où f grandit le plus rapidement.

§1.2 La divergence

Définition 1.4 : divergence.

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert, $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$. La divergence de F notée $\operatorname{div} F$, $\nabla \cdot F$, $\langle \nabla, F \rangle$ est le champ scalaire

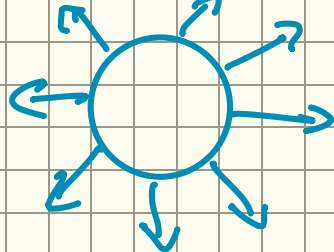
$$\begin{array}{ccc} \operatorname{div} F : \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{div} F(x) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(x) + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x) \end{array}$$

Exemple 1.5

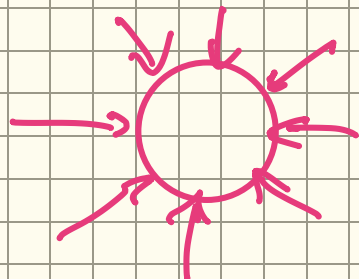
$$F(x, y) = (-x^2 + 2x, -y^2 + 2y)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} F(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} [-x^2 + 2x] + \frac{\partial}{\partial y} [-y^2 + 2y] = -2x + 2 - 2y + 2 \\ &= -2(x + y) + 4 \end{aligned}$$

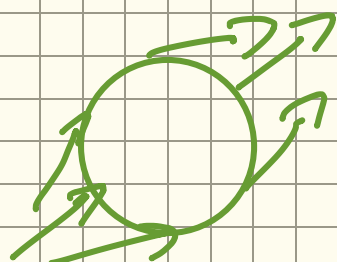
$$\operatorname{div} F(0,0) = 4$$



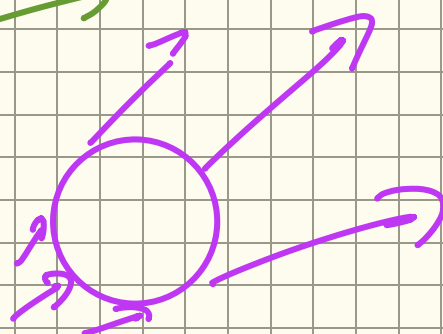
$$\operatorname{div} F(2,2) = -4$$



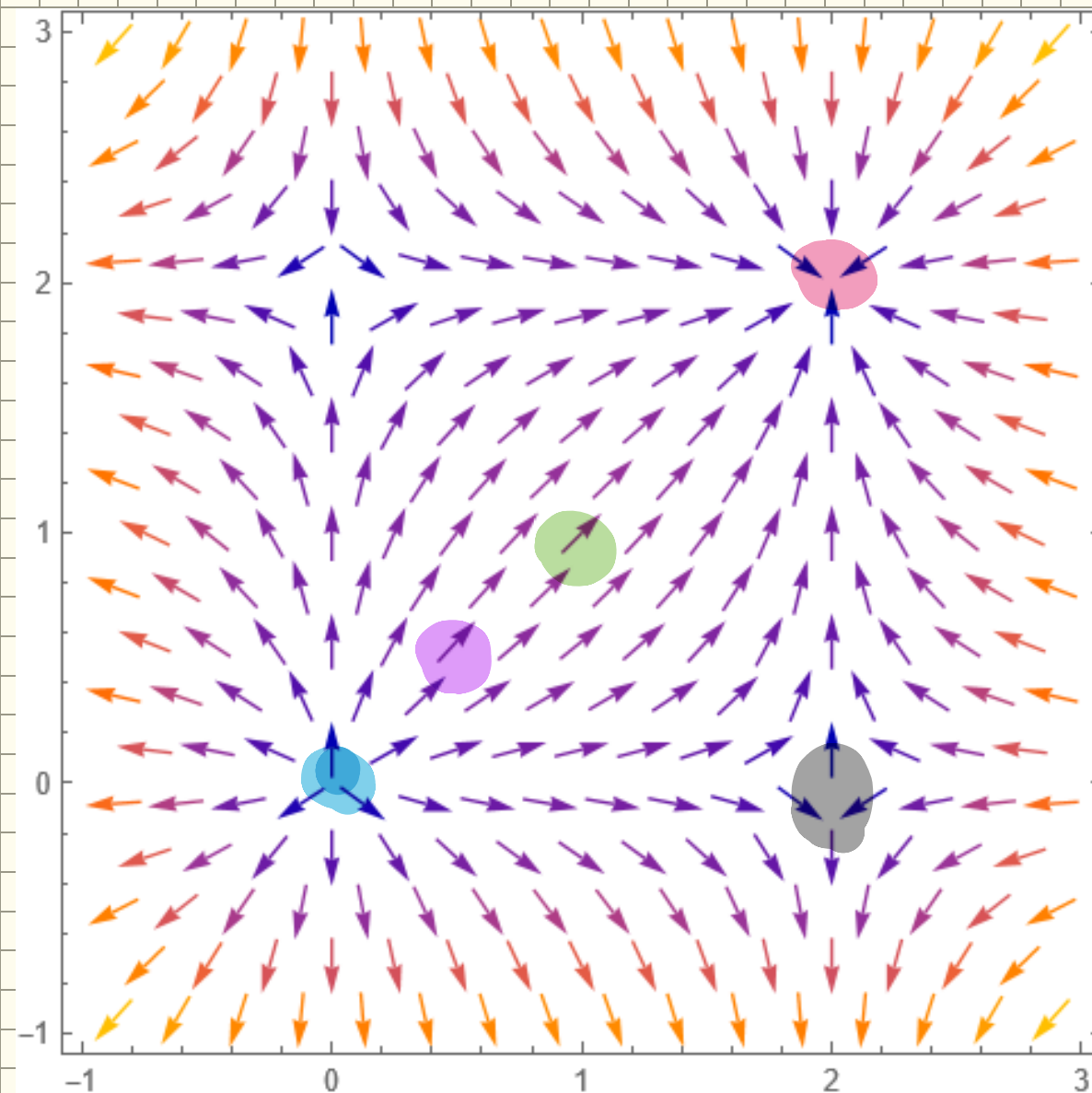
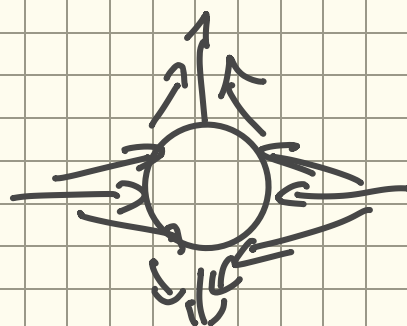
$$\operatorname{div} F(1,1) = 0$$



$$\operatorname{div} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2$$



$$\operatorname{div} F(2,0) = 0$$



Interprétation géométrique de la divergence : La divergence de $\vec{F}$ nous informe sur à quel point $\vec{F}$ se comporte comme une source ($\operatorname{div} \vec{F} \geq 0$) ou un puits ($\operatorname{div} \vec{F} \leq 0$)

§ 1.3 : Le rotationnel

Définition 1.6 : rotationnel

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert, $\vec{F} \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$. Alors, le rotationnel de $\vec{F}$ noté $\operatorname{rot} \vec{F}$ (curl $\vec{F}$ en anglais) est

si $n=2$: le champ scalaire $\operatorname{rot} \vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ défini par

$$\operatorname{rot} \vec{F}(x, y) = \frac{\partial \vec{F}_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial \vec{F}_1}{\partial y}(x, y)$$

Si $n=3$ le champ vectoriel $\text{rot } F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ défini par

$$\text{rot } F(x,y,z) = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

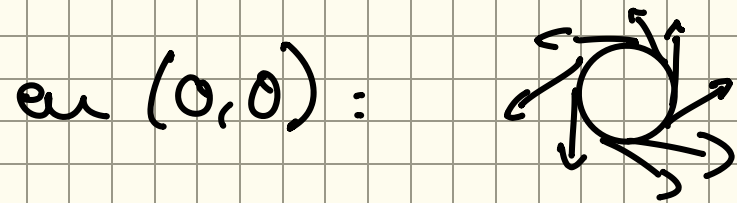
Dans ce cas, on peut voir $\text{rot } F$ comme le produit vectoriel $\nabla \times F$

$$\begin{aligned} \text{rot } F &= \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \\ &= e_x \cdot \frac{\partial}{\partial y} F_3 - e_y \cdot \frac{\partial}{\partial z} F_1 + e_z \cdot \frac{\partial}{\partial x} F_2 \\ &\quad - e_z \cdot \frac{\partial}{\partial y} F_1 - e_x \cdot \frac{\partial}{\partial z} F_2 - e_y \cdot \frac{\partial}{\partial x} F_3 = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

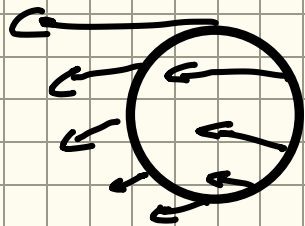
si $n \geq 4$: des formules existent, mais on ne les écrit pas dans ce cours.

Exemples 1.7 :

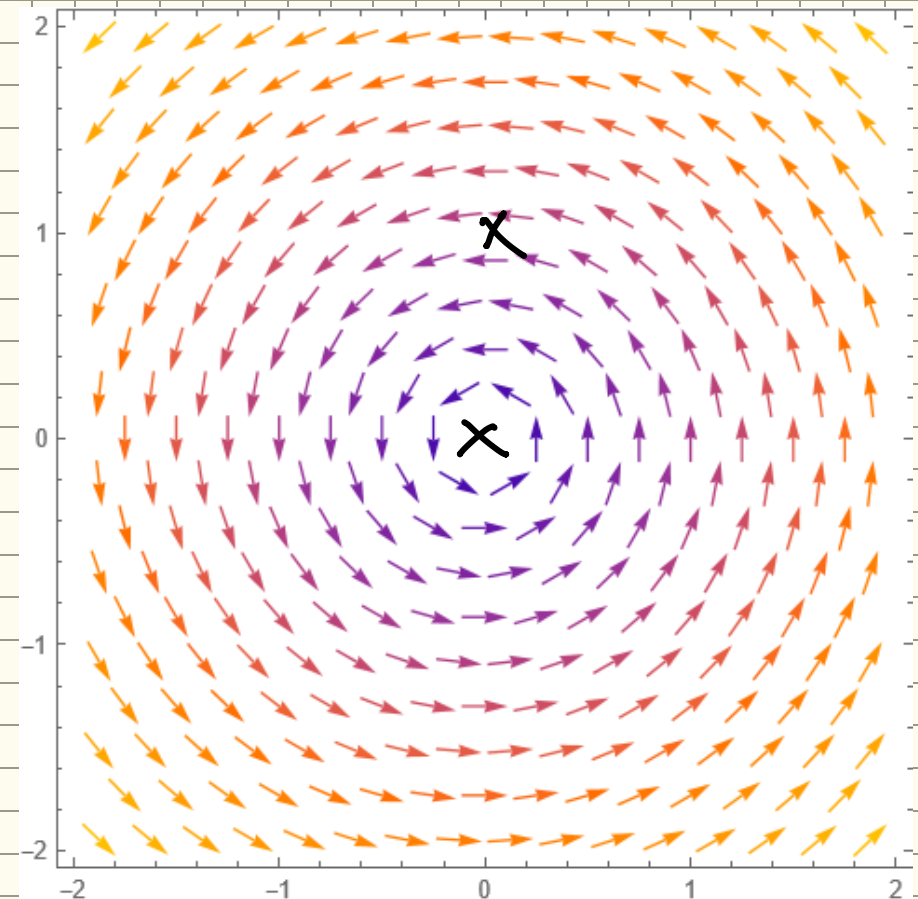
(i) $F(x, y) = (-y, x)$, $\text{rot} F(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} [x] - \frac{\partial}{\partial y} [-y] = 2$.



en $(0, 1)$



Interprétation géométrique du rotationnel : $\text{rot } F$ nous indique à quel point le champ vectoriel tourne, $\text{rot } F > 0 \Rightarrow$ rotation



dans le sens trigonométrique, $\text{rot } F < 0 \Rightarrow$ rotation dans le sens horaire. $\text{rot } F = 0 \Rightarrow$ pas de rotation du tout.

$$(ii) \vec{F}(x, y, z) = (x^2 - e^y, \sin(z), y^2 + z)$$

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 - e^y & \sin(z) & y^2 + z \end{vmatrix}$$

$$= \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial y} [y^2 + z] + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial z} [x^2 - e^y] + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial x} [\sin(z)]$$

$$- \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial y} [x^2 - e^y] - \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial z} [\sin(z)] - \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial x} [y^2 + z]$$

$$= (2y - \cos(z), 0 - 0, 0 - (-e^y))$$

rotation autour de l'axe des y
i.e. dans le plan x, z.

rotation autour de l'axe z, i.e.
dans le plan x, y

rotation autour de l'axe des x, i.e. dans le plan y, z

§1.4 Le Laplacien

Définition 1.8 le laplacien

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f \in C^2(\Omega)$ un champ scalaire.
Le laplacien de f , noté Δf est le champ scalaire.

$\Delta f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ défini par

$$\Delta f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

Exemples 1.9:

(i) $f(x, y) = a + bx + dy$, $\Delta f(x, y) = 0$

Interprétation géométrique de Δf : $\Delta f(x)$ "mesure" la différence entre $f(x)$ et

$$\frac{1}{\text{Aire}(B_r(x))} \cdot \int_{B_r(x)} f(y) dy$$

